

Gabriel Gustavo Rodrigues Dobbro

**Determinação de frequências naturais de
passarela de concreto: análise modal
experimental e método dos elementos finitos**

Brasil

2018

Gabriel Gustavo Rodrigues Dobbro

Determinação de frequências naturais de passarela de concreto: análise modal experimental e método dos elementos finitos

Trabalho de Conclusão de Curso
submetido à Universidade Federal
de Santa Catarina como requisito
parcial para obtenção de título de
Bacharel em Engenharia Civil.

Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Engenharia Civil
Programa de Graduação em Engenharia Civil
Orientador: Prof. Dr.-Ing. Marcos S. Lenzi

Brasil
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Dobbro, Gabriel

Determinação das frequências naturais de passarela de concreto: análise modal experimental e método dos elementos finitos / Gabriel Dobbro ; orientador, Marcos S. Lenzi, 2018.

81 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Graduação em Engenharia Civil, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

1. Engenharia Civil. 2. Ressonância. 3. Frequências naturais. 4. Análise modal experimental. 5. Elementos finitos. I. Lenzi, Marcos S.. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

Gabriel Gustavo Rodrigues Dobbro

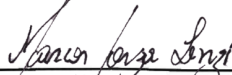
Determinação das frequências naturais de passarela de concreto: análise modal operacional e método dos elementos finitos

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Bacharel, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Graduação em Engenharia Civil

Florianópolis, 06 de Dezembro de 2018:



Prof. Dr. Luciana Rohde
Coordenador do Curso



Prof. Dr. Marcos Lenzi
Orientador

Este trabalho é dedicado à minha família...
“O que prevemos raramente ocorre; o que menos esperamos geralmente
acontece.”

— Benjamin Disraeli

Agradecimentos

Primeiramente a minha família pelo apoio seguir meu sonho, mesmo sendo longe, pelo suporte nas dificuldades e por acreditar em mim.

Aos meus pais por serem tudo o que eu precisei ao longo desses seis anos.

À Universidade Federal de Santa Catarina, por me proporcionar uma experiência acadêmica e de vida, dentro e fora do Brasil.

Ao meu professor orientador Dr. Marcos Lenzi pela oportunidade de realizar um trabalho diferente e porque sem ele este trabalho não seria possível.

Aos professores do Departamento de Engenharia Civil da UFSC pela minha formação acadêmica e profissional

À RKS Engenharias pela estágio, e pela oportunidade de aprender na prática.

A Deus, pois se cheguei até aqui, Ele que me trouxe.

*“Quanto mais aumenta nosso conhecimento, mais evidente fica nossa
ignorância”*

— John F. Kennedy

Resumo

O presente trabalho pretende realizar uma análise dinâmica em uma estrutura real e funcional existente na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). A análise será feita experimentalmente e seu resultado comparado com um modelo computacional feito pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), sendo que, ambas as etapas deste trabalho serão executadas utilizando programas comerciais. Na fase experimental, executar-se-á uma Análise Modal Operacional (AMO), onde pretende-se os primeiros modos de vibração de flexão da estrutura e suas respectivas frequências naturais, já na fase computacional, será utilizado um *software* comercial de MEF para modelar. Dessa forma, pretende-se validar o modelo numérico com base nos dados experimentais. O modelo numérico proposto será realizado com um modelo unidimensional com elementos de vigas. Para o modelo proposto, será realizado um ajuste de modelos modificando as propriedades mecânicas da estrutura, que são desconhecidas. Neste trabalho também serão calculados o amortecimento e a curva de resposta em frequência por um método alternativo, a título de conhecimento. Neste método, que se dará por tratamento de dados via "*Matlab*", serão encontradas as mesmas frequências que no método experimental, porém com uma forma de curva diferente, devido ao método.

Palavras-chaves: Frequências naturais - Método dos Elementos finitos
- Análise AMO - Vibração

Abstract

The present work intends to carry out a dynamic analysis in a real and functional structure existing in the Federal University of Santa Catarina (UFSC). The analysis will be done experimentally and its results compared to a computational model made by the Finite Element Method (FEM). Both phases of this work will be executed using commercial programs. In the experimental phase, an Operational Modal Analysis (AMO) will be realized, where the first vibrational bending modes of the structure and their respective natural frequencies are intended, already in the computational phase, a commercial FEM software will be used to create a model. In this way, it's intended to validate the numerical model based on the experimental data. The proposed numerical model will be realized with a one-dimensional model with elements of beams. For the proposed model, a model adjustment will be made through the mechanical properties of the structure, which are unknown. In this work the damping and the frequency response curve will also be calculated by an alternative method, by way of knowledge. This method, that shall be conceived by data treatment via "*Matlab*", is expected to find the same frequencies as the experimental method, but with a different form of curve, because of the method.

Keywords: Natural frequencies - Finite Elements Method - AMO analysis – Vibration

Lista de Figuras

Figura 1 – Tacoma Narrows Bridge - EUA.	31
Figura 2 – Descrição do método da banda de meia pontência para uma frequência central f_n	35
Figura 3 – Exemplo de FRF.	41
Figura 4 – Exemplo de coerência boa.	43
Figura 5 – Exemplo de coerência ruim.	44
Figura 6 – Coerência com dados desconsiderados.	45
Figura 7 – Ilustração dos componentes da passarela.	48
Figura 8 – Medidas passarela.	48
Figura 9 – Desgaste na superfície.	49
Figura 10 – Passarela exemplo.	49
Figura 11 – Configuração experimental.	51
Figura 12 – Pontos de leitura na passarela.	54
Figura 13 – Objeto de estudo.	55
Figura 14 – Impacto de cima para baixo com peso acoplado. . .	56
Figura 15 – Impacto de baixo para cima sem peso acoplado. . .	56
Figura 16 – Coerências do impacto de cima para baixo.	57
Figura 17 – Coerências do impacto de baixo para cima.	57
Figura 18 – Coerências do impacto pulando.	58
Figura 19 – FRFs obtidas com impacto de cima para baixo e de baixo para cima respectivamente.	59
Figura 20 – Dados de FRF dos 22 pontos coletados.	66
Figura 21 – Coerência.	66
Figura 22 – Coerência da coleta com acelerômetro em cima da passarela.	67
Figura 23 – Zoom nas frequências analisadas.	68
Figura 24 – Primeiro modo de flexão experimental.	69
Figura 25 – Segundo modo de flexão experimental.	69
Figura 26 – Terceiro modo de flexão experimental.	69

Figura 27 – Desenho esquemático da movimentação das extremidades.	70
Figura 28 – Modelo unidimensional.	71
Figura 29 – Primeiro modo de vibração.	72
Figura 30 – Segundo modo de vibração.	73
Figura 31 – Terceiro modo de vibração.	73
Figura 32 – FRF feita pelo Matlab.	74
Figura 33 – Amortecimento.	76

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Valores sugeridos de frequência crítica.	30
Tabela 2 – Discretização da passarela.	52
Tabela 3 – Resultados de Cálculo.	53
Tabela 4 – Dados Extras.	62
Tabela 5 – Faixa de variação dos parâmetros do material.	63
Tabela 6 – Resultados sem e com ajuste de modelo - sem alvéolos.	71
Tabela 7 – Resultados sem e com ajuste de modelo - com alvéolos.	72
Tabela 8 – Equipamentos.	83
Tabela 9 – Valores Calculados de ω e v	84

Lista de Siglas e Normas Técnicas

NBR 6118 (2014) - Projeto de estruturas de concreto

NBR 8800 (2008) - Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios

NBR 15575 (2013) - Norma de Desempenho de Edificações Habitacionais

ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas

MEF - Método dos Elementos Finitos

AMO - Análise Modal Operacional

FRF - Função de Resposta em Frequência

FFT - Fast Fourier Transform, ou Transformada Rápida de Fourier

Lista de simbolos

f_{crit}	Frequência Crítica (Hz);
ω	Frequência angular (rad/s);
f_{ck}	Resistência característica do concreto aos 28 dias, expressa em MPa;
f_n	Frequência de ressonância (Hz);
\ddot{x}	Aceleração (m/s^2);
A	Constante de dispersão (m/\sqrt{s});
ν	Coefficiente de Poisson;
η	Amortecimento;
v	Velocidade (m/s);
λ	Comprimento de onda (m);
ρ	Densidade (Kg/m^3);
m	Massa (kg);
E	Módulo de Young/Elasticidade (GPa);
I	Momento de inércia (m^4);
L	Comprimento (m).

Sumário

Lista de Figuras	17
Lista de Tabelas	19
1 Introdução	27
1.0.1 Ressonância em Estruturas	30
1.1 Objetivos	32
1.1.1 Limitações do Trabalho	32
1.1.2 Ajuste do Modelo Numérico	33
2 Análise Modal e AMO	37
2.1 Análise Modal	37
2.2 Análise Modal Operacional	38
2.3 Conceitos	39
2.3.1 Função de resposta em frequência (FRF)	39
2.3.2 Coerência	41
3 Metodologia Experimental	47
3.1 Objeto de Estudo	47
3.1.1 Definição dos Pontos de Coleta	51
3.1.2 Formas de Excitação	54
3.1.3 Coleta de Dados	60
4 Modelo Numérico	61
4.1 Modelo Unidimensional - 1-D	62
5 Resultados	65
5.1 Resultados Experimentais	65
5.2 Resultados Numéricos - 1-D	70
5.3 Conhecimento Extra	73
5.3.1 Contrução de FRF pelo Matlab	74
5.3.2 Determinação do amortecimento estrutural	75
6 Conclusão	77
6.1 Trabalhos futuros	79
Referências	81

7	Apêndice	83
7.1	Apêndice A	83
7.1.1	Equipamentos	83
7.2	Apêndice B	84
7.2.1	Valores Encontrados para ω e v	84
7.3	Apêndice C	84
7.3.1	Algoritmo para obtenção da FRF a partir de dados de aceleração no tempo	84

Capítulo 1

Introdução

Engenharia civil é o ramo da engenharia que se dedica a projetar, construir, gerenciar e manter serviços que se destinem à infraestrutura em geral, de forma a utilizar o mínimo de recursos possível, mantendo ainda, eficiência e segurança da estrutura produzida. Atualmente, existe uma demanda por métodos de construção mais eficazes, que transformam a obra numa verdadeira indústria, proporcionando mais velocidade e eficiência. Além disso, estruturas modernas estão se tornando cada vez mais desafiadoras – (altas e esbeltas).

Por exemplo, de acordo com [ZAPFE \(2007\)](#), com o avanço da tecnologia e o desenvolvimento dos materiais para construção (por exemplo, o concreto de alto desempenho), é possível criar estruturas cada vez mais altas com menor uso de material, e concomitantemente, prédios mais altos, em geral, apresentam rigidez geral menor que prédios pequenos e quanto menor a rigidez, menor a frequência natural da estrutura, como pode-se notar na Equação 1.1 ([Thomson \(1983\)](#)). Muitos projetos de estruturas são realizados baseados apenas em análises estáticas, pois, como a maioria das obras de engenharia não é de grande porte, esta é considerada desnecessária. Adicionalmente, análises dinâmicas (no domínio do tempo ou da frequência), podem oferecer informações importantes no dimensionamento da estrutura.

A frequência natural fundamental é expressa por:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad (1.1)$$

onde f_n é a frequência natural em Hz, K é a rigidez, expressa em N/m e m é a massa expressa em kg.

Existem diversos fatores que podem causar vibrações em estruturas, como:

- fluxo intenso de trens e veículos;
- abalos sísmicos;
- ação do vento;
- utilização de pessoas, dentre outros.

Estes carregamentos externos, além de demandarem soluções quanto à estabilidade estrutural, demandam, também, níveis aceitáveis de condições de serviço quanto à vibração estrutural. Nas situações mencionadas, inúmeras técnicas de controle de vibrações estão disponíveis. Pode-se citar:

- A modificação da massa e/ou da rigidez da estrutura ([BARRAULT \(2006\)](#));
- Alteração no amortecimento estrutural (controle passivo), seja por adição de amortecedores ou outro método de dissipação de energia ([NICOLETTI \(2013\)](#));
- Utilização de controle ativo de vibrações, principalmente implementado em excitações por vento e abalos sísmicos ([ALVES \(2015\)](#)).

Em geral, na engenharia civil, análises vibracionais não são realizadas durante a fase de projeto, o que pode ocasionar falhas catastróficas. Como exemplo pode-se citar o caso da Millenium Bridge, em Londres ([DALLARD \(2001\)](#)). Desde o dia de abertura, a ponte apresentou

oscilações devido a movimentação de pedestres e carga de vento, e conforme explicitado, houve uma intervenção, fazendo assim um reforço na estrutura.

As principais normas brasileiras que o engenheiro utiliza para seus projetos são a [NBR 6118 \(2014\)](#) e [NBR 8800 \(2008\)](#), que são as normas que regem os cálculos para estruturas de concreto armado e aço, respectivamente. Estas apresentam poucas considerações sobre vibrações. Fica evidente a falta de estudos na área de vibrações em estruturas que não só podem favorecer o conforto e sensação de segurança dos usuários, como também pode evitar catástrofes. Por exemplo, as vibrações no piso de um prédio residencial, embora não causem danos estruturais à edificação, podem ficar tão desconfortáveis que o sistema do piso fica inutilizado ([AHMED Ehsan; BADARUZZAMAN \(2011\)](#)).

Segundo [SHIGLEY \(1969\)](#), frequência natural é um fenômeno que ocorre se, um sistema, após um distúrbio inicial, é deixado para vibrar por si próprio. A frequência com a qual ele oscila sem a presença de forças externas é conhecida como frequência natural. Um sistema vibratório com n graus de liberdade terá, em geral, n frequências naturais distintas.

De acordo com [RAO \(2008\)](#), ressonância mecânica é a tendência do sistema físico de oscilar à sua máxima amplitude. Esta tendência depende do quão próximos estão a frequência de excitação das frequências naturais do sistema. Nestas frequências, mesmo pequenas excitações podem gerar grandes amplitudes de vibração do sistema, e até conduzir ao colapso.

Na engenharia civil, as vibrações têm papel fundamental nas etapas de projeto e construção da estrutura, porém, o assunto é tratado de maneira superficial na [NBR 6118 \(2014\)](#). A norma aborda poucos comentários sobre vibrações e possui um subitem específico para o assunto, Estados Limite de Vibrações Excessivas (ELS-VE). O subitem em questão específica que para assegurar o comportamento satisfatório das estruturas sujeitas a vibrações, deve-se afastar o máximo possível as frequências naturais da estrutura (f) da frequência crítica (f_{crit}), que

depende da funcionalidade da estrutura. A norma apresenta também a inequação 1.2 abaixo e a tabela 1 contendo os valores sugeridos de frequência crítica. Deve-se apontar que 1.2 é a frequência da ação crítica, ou seja, a frequência da ação/excitação ocorrendo na estrutura, pode-se citar como exemplo um motor funcionando em cima da estrutura. Neste exemplo, a frequência com que a máquina vibra é a 1.2.

$$f > 1, 2.f_{crit} \tag{1.2}$$

Tabela 1 – Valores sugeridos de frequência crítica.

Caso	f_{crit} (Hz)
Ginásio de Esportes	8,0
Salas de dança ou concerto sem cadeiras fixas	7,0
Escritórios	3,0 a 4,0
Salas de concerto com cadeiras fixas	3,4
Passarelas de pedestres ou ciclistas	1,6 4,5

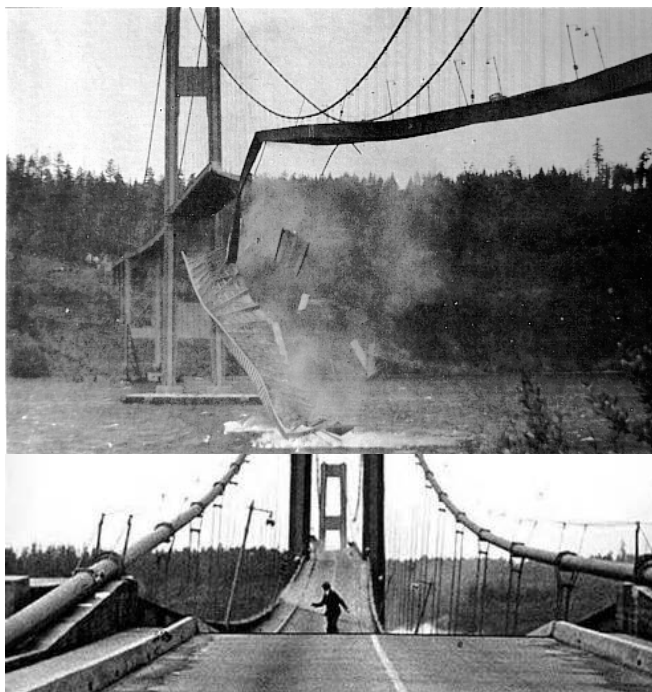
Como pode ser visto na tabela 1, estruturas em geral possuem baixa frequência natural. Porém, caso ocorra algum erro de cálculo, este valor pode ser alterado de maneira inesperada. Vale Ressaltar que, embora no texto introdutório tenha sido citada a [NBR 8800 \(2008\)](#) relativa a estruturas em aço, ela não será explicitada como a supracitada pois o objeto de estudo deste trabalho tem sua parte estrutural feita em concreto.

1.0.1 Ressonância em Estruturas

Um exemplo clássico do potencial destrutivo da ressonância, é quebrar uma taça de cristal somente com a voz. A frequência da voz coincide com a frequência com que a taça tende a vibrar aumetando a amplitude da vibração da taça até que esta chega ao limite do material e se rompe. O mesmo aconteceu no Estados Unidos em 1940 no condado Pierce Washington, onde a ponte Tacoma Narrows ([FULLER \(1994\)](#)) virou atração turística por oscilar bastante em função das rajadas de

vento. Com ventos de baixa intensidade, já era possível presenciar oscilações de grande amplitude, portanto era esperado que ocorresse colapso quando a intensidade do vento aumentasse. A ponte colapsou em um dia atípico de ventos, no qual era possível observar oscilações com metros de amplitude (Figura 1).

Figura 1 – Tacoma Narrows Bridge - EUA.



O colapso da ponte ocorreu não apenas como resultado da ressonância mecânica, mas também da flutuação aerolástica (*"flutter"* um processo que ocorre quando oscilações complexas e variáveis são causadas por ventos. Na ressonância, temos como excitação uma força periódica causa uma resposta do sistema muito maior quando em frequências específicas. No *flutter* tem-se como excitação a velocidade relativa entre o vento e um objeto (Barton (2018)), que se intensifica com a ressonância.

Prédios também podem sofrer com a ressonância. Este fenômeno é mais comum em prédios esbeltos, que por serem menos rígidos tendem

a ter menor frequência fundamental e a oscilar mais. Conforme a altura do prédio aumenta, a rigidez geral da estrutura tende a diminuir, e como a Equação 1.1 demonstra, com a redução da rigidez a frequência natural reduz também.

1.1 Objetivos

Este trabalho busca conduzir um experimento para determinar as primeiras frequências naturais de flexão de uma passarela existente e funcional, feita de concreto armado. Adicionalmente, o experimento será utilizado como fonte de dados para alimentar o modelo de MEF, no qual as frequências naturais serão encontradas. Por fim, será feita uma comparação entre os resultados experimentais e numéricos. Como objetivos específicos, têm-se:

- Identificar qual forma de excitação experimental da estrutura é mais adequada;
- Determinar o amortecimento estrutural experimental;
- Obter as frequências naturais experimentais e seus modos de vibração;
- Contruir um modelo numérico representativo pelo MEF: unidimensional;
- Realizar um ajuste das propriedades mecânicas do modelo numérico com base nos resultados experimentais;

1.1.1 Limitações do Trabalho

O presente trabalho teve as seguintes limitações:

- Restringir-se a uma análise dinâmica da estrutura em questão, não sendo realizada a análise estática;

- Devido a ausência de uma análise estática, o modelo computacional não inclui os efeitos estáticos. Portanto, é representativo apenas para a determinação das frequências naturais;
- Incertezas nos dados experimentais:
 - Dados dos materiais utilizados;
 - Condições de contorno da passarela;
 - Superfície superior altamente desgastada, dificultando medições;
 - Geometria interna da passarela desconhecida (presença de alvéolos ou grumos de concretagem);
 - Dificuldade de excitar a faixa de frequências correspondente aos modos de vibração estudados.

1.1.2 Ajuste do Modelo Numérico

Para o modelo em MEF, será utilizado o *software* comercial **ANSYS** (1994), onde serão extraídos as frequência naturais e seu respectivos modos de vibração (as informações do *software* estão disponíveis no apêndice A). Porém, espera-se que a princípio estes resultados não coincidam com os coletados experimentalmente, pois há diversas incertezas na estrutura: (a resistência à compressão característica do concreto, f_{ck} , quantidade de aço na secção transversal, módulo de elasticidade, entre outros). Dessa forma, será feito um ajuste do modelo, de forma simplificada para aproximá-lo à realidade. É importante salientar, que em uma situação real de projeto, essas incertezas seriam facilmente sanadas pelo projetista, que teria todas as medidas reais, propriedades dos materiais empregados e as informações necessárias para alimentar o modelo computacional, deixando-o assim mais confiável.

O ajuste de modelo se dará da seguinte forma: diferentes valores para as propriedades mecânicas serão testadas, a fim de obter as mesmas frequências naturais encontradas experimentalmente. Também serão

inseridos no modelo, dados referentes a uma passarela similar, na qual foram encontrados alvéolos como será visto no trabalho.

De acordo com CREMER L; HECKEL (1988) as oscilações decaem com tempo e espaço pois há uma forma de conversão de energia, cinética e potencial, da oscilação em outro tipo diferente de energia. Essa transformação é conhecida como amortecimento ou dissipação e pode ocorrer através de mecanismos de radiação ou por dissipação interna na estrutura.

O amortecimento real da estrutura não será inserido no modelo numérico, apenas o valor de norma (EN 12354-2 (2001)) foi incorporado, desta forma, o cálculo do amortecimento terá valor didático apenas. Vale acentuar que o amortecimento não possui grande influência sobre o cálculo das frequências naturais, dessa forma não são esperadas diferenças significativas nos resultados. No entanto, esta informação pode ser utilizada em análises futuras, como por exemplo em análises harmônicas com excitações forçadas.

Há vários mecanismos externos de amortecimento, dentre eles pode-se citar os principais: radiação externa e dissipação por amortecimento em juntas. Já os mecanismos internos ocorrem no interior dos materiais e se devem à propagação de ondas na estrutura, essas ondas causam deslocamentos relativos entre grãos do material, convertendo assim energia cinética e potencial em térmica (LENZI (1999)).

Para a obtenção do amortecimento será utilizado um algoritmo de Matlab para determinar o amortecimento a partir do método da banda de meia potência. Este método possui limitações e depende diretamente da qualidade e discretização das funções de resposta em frequência medidas.

O método consiste em, para cada frequência central, medir a largura de banda (Δf) 3 dB abaixo do pico de ressonância, que ocorre na frequência f_n . Desta forma, segundo CREMER L; HECKEL (1988), o fator de amortecimento é descrito pela equação

$$\eta = \frac{\Delta f}{f_n} = \frac{(f_2 - f_1)}{f_n}, \quad (1.3)$$

onde f_2 é a frequência de corte superior, f_1 é a frequência de corte inferior e \ddot{X}/F é a FRF em escala decibel [dB].

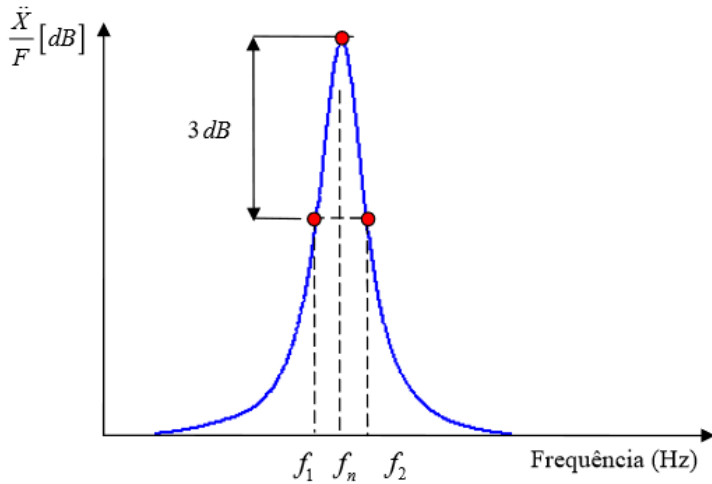


Figura 2 – Descrição do método da banda de meia potência para uma frequência central f_n .

É necessário destacar que a Figura 2 apresenta apenas frequência ressonante de uma FRF. Além disso, o método possui ressalvas:

- É aplicado em frequências centrais específicas desejadas;
- Os modos (picos) devem estar suficientemente espaçados.

Vale realçar que existem diversos métodos mais precisos para a obtenção do amortecimento estrutural, como a largura de banda (Bandwidth Method - [MEAD \(1998\)](#)), porém, o método da banda de meia potência foi escolhido por ser mais simples de ser implementado, ou seja, sua programação é mais simples, tomando assim menos tempo.

Capítulo 2

Análise Modal e AMO

2.1 Análise Modal

"Análise modal é o processo de determinação das características dinâmicas inerentes a um sistema, em termos de *frequências naturais*, *fator de amortecimento* e *formas modais*, e utilizar isso para formular um modelo matemático para seu comportamento dinâmico. O modelo formulado matematicamente é referido como modelo modal do sistema e a informação acerca das características são chamadas de dados modais"(He (2001)).

Uma análise modal é um método de se determinar características dinâmicas de um elemento. Essa análise pode encontrar, por exemplo, as frequências naturais do elemento de estudo, bem como os modos de vibração da mesma.

Modos de vibração de uma estrutura são as maneiras como a estrutura tende a vibrar quando em ressonância. Na prática quando se excita um sistema, a sua resposta dinâmica consiste em um conjunto de modos de vibração. Portanto, há uma mistura de formas de vibração, com várias frequências ressonantes ao mesmo tempo. Por isso, uma análise modal ou modal operacional (*AMO*) permite determinar parâmetros (tal qual o modo de vibração, a frequência correspondente e o amortecimento envolvido) dos modos de vibração de uma determinada faixa de

frequências. Assim, se faz necessário definir uma faixa de frequências de análise, pois, como as estruturas reais não são sistemas de massa mola e sim contínuos, há infinitas frequências naturais. Sendo assim, é impossível se estudar por completo, até por que não seria possível excitar todas as frequências.

Em uma análise modal consegue-se funções de resposta em frequência (sua definição será apresentada neste capítulo), as quais são obtidas por processamento dos sinais adquiridos de excitação (força) e de resposta (aceleração, velocidade ou deslocamento) da estrutura. É importante ressaltar que a força aplicada na estrutura deve ser medida, e isso pode ser feito a partir de martelos instrumentados ou *shakers* (excitador eletromecânico), que serão detalhados mais à frente. A partir dos dados de entrada (força e aceleração) será calculada uma curva de FRF de força por aceleração. Vale ressaltar que as medições podem ser feitas de duas maneiras, a primeira consiste em manter a leitura de força no mesmo lugar, enquanto o acelerômetro faz medições de toda a estrutura, a outra maneira consiste em manter a leitura de aceleração no mesmo ponto, fazendo assim a excitação do sistema e consequente leitura de força em toda a estrutura (He (2001)). É importante frisar que embora ambas as maneiras expressem os mesmos resultados, se faz necessário manter o mesmo referencial, ou seja, ao optar por qual das duas leituras estará fixa (força ou aceleração), deve se manter a escolha e informar ao *software* (Pulse Reflex (2015)) qual é a referência.

2.2 Análise Modal Operacional

Em suma a análise AMO tem os mesmos objetivos e aplicações que uma análise modal, porém essa necessita de força e aceleração como dados de entrada, enquanto aquela necessita de dois dados de aceleração. Na AMO a excitação pode ser feita sem medição de força, dessa forma sua utilização se torna mais ampla pois em muitos casos não há a possibilidade de se instalar um excitador eletromecânico (*shaker*) no sistema e o martelo instrumentado não é grande o suficiente para

estrutura. Isso se deve ao fato de que cada martelo tem sua limitação de força, dessa forma, é difícil encontrar martelos grandes o suficiente para excitar uma estrutura de grande porte (geralmente as estruturas de engenharia civil possuem grandes dimensões e massa).

De forma similar à análise modal, pode-se realizar as medições de duas formas, são elas: manter o acelerômetro de referência fixo e utilizar o segundo acelerômetro para colher os dados acerca da estrutura, ou ainda, mover o acelerômetro de referência pela estrutura mantendo-se o de medição fixo.

Este trabalho focará sua fase experimental em uma análise AMO da passarela apresentada, isso se deve à disponibilidade de dois acelerômetros, cedidos pelo Laboratório de Vibrações e Acústica (LVA) da UFSC. O laboratório não dispunha de *shakers*, tão pouco de martelos instrumentados grandes o suficiente para excitar uma estrutura como a avaliada neste trabalho, já que o laboratório trabalha com sistemas menores. Não seria possível utilizar um martelo menor pois este não resistiria a grandes forças, sendo assim não seria possível excitar a estrutura adequadamente.

2.3 Conceitos

2.3.1 Função de resposta em frequência (FRF)

Uma função de resposta em frequência é a relação entre a excitação do sistema (força ou aceleração) e sua resposta dinâmica sendo analisada no domínio da frequência. Essa função é utilizada para identificar as frequências ressonantes e modos de vibração de um sistema. Em suma, os resultados a serem obtidos na etapa experimental deste trabalho são FRF's, definida por

$$H(\omega) = \frac{\ddot{x}_1(\omega)}{\ddot{x}_2(\omega)}, \quad (2.1)$$

onde $\ddot{x}_1(\omega)$ é a FFT do sinal de aceleração da excitação no domínio do tempo, $\ddot{x}_2(\omega)$ a FFT do sinal de aceleração da resposta no domínio

do tempo e ω a frequência angular (INMAN (2007)). A FRF pode ser definida baseada em dados de força por aceleração, sendo esta resultado da análise modal.

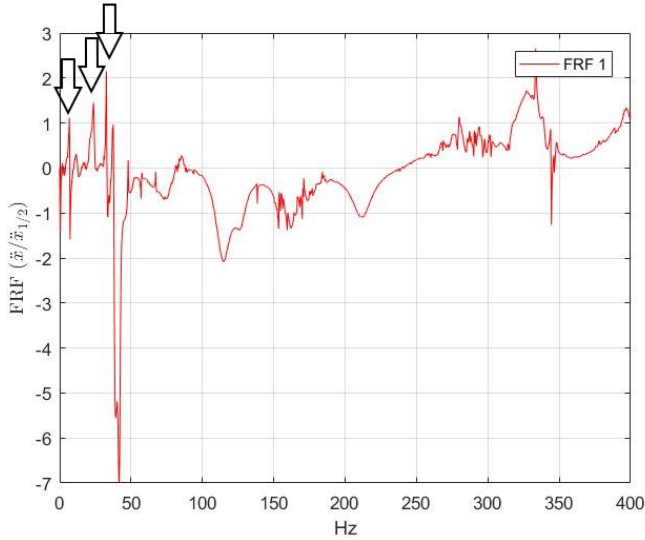
Por exemplo, tomando-se dois pontos em uma estrutura, seria possível fixar um acelerômetro em um determinado ponto e excitar o sistema em outro ponto (realizando-se a leitura neste ponto também, seja ela força ou aceleração). Medindo-se a resposta e a excitação, a função resposta em frequência resultante descreveria, com base em frequência, a relação entre estes dois pontos na estrutura.

É importante salientar que a relação acima expressa não representa o quociente de dois dados de aceleração, mas sim o quociente entre dois dados de frequência.

Explicando de maneira simples, os dois dados de aceleração são lidos, analisados e a partir deles é feito um cálculo conhecido como transformada rápida de Fourier (FFT). Este cálculo transforma dados de aceleração no domínio do tempo em dados no domínio da frequência, portanto o quociente apresentado na equação 2.1 representa dados de frequência, que são as FFT do dado medido dividido pela FFT da referência (INMAN (2007)).

Em uma FRF, os picos representam frequências ressonantes (Figura 3). apresenta uma FRF, os picos destacados representam as frequências ressonantes. Estes picos são os utilizados para o cálculo do amortecimento estrutural. Existem diversos métodos para a determinação experimental do amortecimento estrutural com base em uma FRF. Dois métodos amplamente empregados na área de vibrações são: o método da largura de banda e banda de meia potência.

Figura 3 – Exemplo de FRF.



2.3.2 Coerência

A *função de Coerência*, representada por γ^2 , é definida como sendo a razão entre os dois valores de $H(\omega)$ calculados a partir da Equação 2.1. Em particular a função coerência é definida por

$$\gamma^2 = \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)}, \quad (2.2)$$

que se encontra sempre entre 0 e 1 (INMAN (2007)). De fato, se as medições são consistentes, $H(j\omega)$ deverá ter o mesmo valor, independentemente da forma como é calculada, e a coerência deve ser 1 ($\gamma^2 = 1$). A coerência é uma medida de repetibilidade do experimento, e indica a presença de ruído no sinal lido. Se for zero, a medição é puramente ruído, se for 1, os dados coletados não estão contaminados. Na prática a coerência é tracada em função da frequência e é tomada como uma indicação do quão preciso o processo de medição é ao longo de um determinado intervalo de frequências. Geralmente, os valores de $\gamma^2 = 1$ devem ocorrer a valores de ω distantes das frequências ressonantes da

estrutura. Próximo à ressonância, os sinais são grandes e ampliam o ruído. Na prática, os dados com uma coerência menos do que 0,75 não são usados e indicam que o ensaio deve ser refeito (INMAN (2007)).

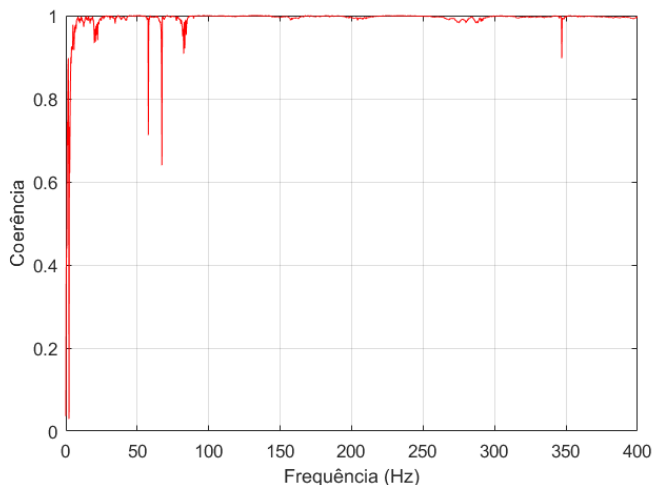
A repetibilidade dos resultados e, consecutivamente a coerência, dependem de vários fatores, entre eles estão os seguintes:

- Fixação adequada dos acelerômetros: já que os acelerômetros utilizados são uniaxiais, deve-se manter a verticalidade do acelerômetro para que as acelerações em outras direções não sejam registradas. Outro ponto importante é a forma de fixação do acelerômetro. Neste estudo optou-se por usar cera fixadora (fornecida pelo LVA), que em superfícies limpas garante boa aderência;
- Superfície de fixação plana: como as medições são realizadas apenas no sentido vertical, caso a superfície à qual o acelerômetro foi fixado seja inclinada, haverá uma distorção nos dados. Este tópico será abordado mais à frente, quando for esclarecido o procedimento adotado na passarela;
- Magnitude do impacto: é necessário que a magnitude dos impactos seja similar, pois, a função coerência faz uma relação entre as FRF's geradas nos impactos e, caso algum impacto seja significativamente diferente dos demais a amplitude da FRF mudará, afetando assim a coerência. As medições neste trabalho foram feitas com médias extraídas de três impactos por ponto de coleta;
- Direção e sentido do impacto: pelo mesmo motivo anterior, supondo hipoteticamente que o primeiro impacto tenha sido perfeitamente vertical, caso o segundo tenha uma variação, atingindo o ponto de impacto na direção diagonal, é de se esperar que a força do impacto tenha componente horizontal (que os acelerômetros se bem posicionados não lerão), sendo assim, a excitação vertical será menor e afetará a média;
- Qualidade do impacto: em um impacto adequado deve-se assegurar com que o tempo de contato com a superfície seja o menor

possível e que haja um único impacto. A sentença anterior parece sem sentido, porém como a leitura dos acelerômetros é muito precisa, mesmo quando aparentemente houve um único impacto, os sinais detectam mais de um. Isso ocorre, pois, ao impactar a estrutura, o martelo quica instantaneamente, causando um segundo impacto que altera os resultados, porém, por se tratar de um fenômeno instantâneo, é praticamente imperceptível ao experimentador. O *software* utilizado também informa caso ocorra esse fenômeno, conhecido como "*double hit*".

Mesmo tomando estes cuidados, não é garantido que todos os resultados sejam adequados, exigindo, em alguns casos, a repetição exaustiva do experimento. A seguir serão apresentados um exemplo de coerência considerada boa e ruim respectivamente.

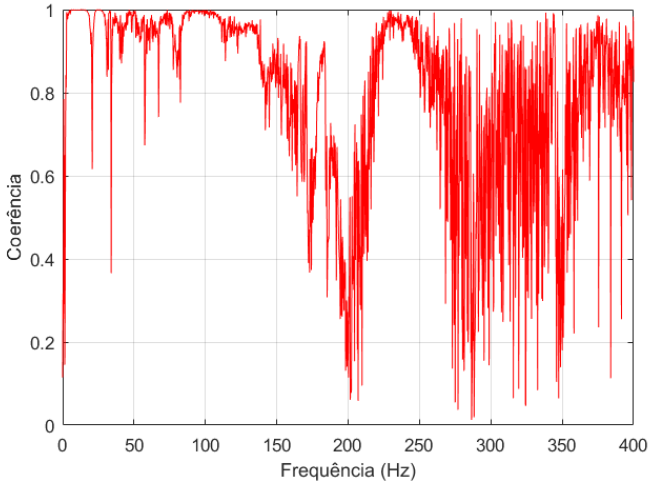
Figura 4 – Exemplo de coerência boa.



Para que a coerência seja considerada boa e o dado coletado seja aceito, é necessário que a leitura na frequência desejada possua coerência maior que 0,75 (75% de repetibilidade - Figura 4 - INMAN (2007)). Por exemplo, supondo que uma frequência importante seja de 100 Hz, observando o gráfico de coerência pode se notar que, na frequência

desejada, a coerência é de quase 1, portanto, o dado coletado para a frequência de 100 Hz é confiável.

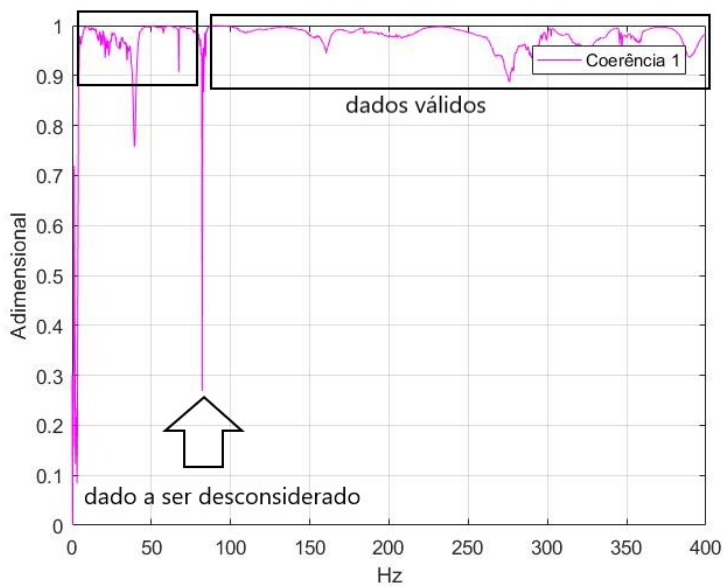
Figura 5 – Exemplo de coerência ruim.



Na Figura 5 pode se observar que a coerência não é uma linha suave com poucos picos. Mesmo nas frequências mais baixas é possível notar que a linha está distorcida. Dessa forma pode se caracterizar esse conjunto de medições como ruim, e assim repetir o experimento. Ainda pode ser notado que a figura apresenta faixas de coerência máxima (entre 10 e 20 Hz, entre 75 e 115 Hz, etc), estes dados podem ser utilizados, ainda que seja recomendado a repetição do ensaio [*INMAN \(2007\)](#).

É possível ainda que, uma coerência considerada boa, apresente picos abaixo de 0,75. Nestes casos (Figura 6) podem ser considerados os dados em torno do pico, porem este deve ser descartado. Caso a frequência que se quer analisar caia num pico abaixo de 0,75, se faz necessário repetir o experimento.

Figura 6 – Coerência com dados desconsiderados.



Capítulo 3

Metodologia Experimental

3.1 Objeto de Estudo

O objeto de estudo deste trabalho é a passarela que se encontra na UFSC, em Florianópolis, nas proximidades do Departamento de engenharia civil, sobre um córrego. A passarela em questão é feita de concreto armado, com uma camada de concreto feita para desgaste na parte superior (ver Figura 7). Há ainda um corrimão feito de material metálico pintado a fim de evitar corrosões.

A figura 8 mostra as medidas da passarela. Como pode ser visto, o sistema de concreto tem dimensões 960x30x120 cm enquanto o corrimão tem 4 cm de diâmetro e cada barra circular que segue o corrimão tem 2 cm de diâmetro. Embora não conste na figura, o diâmetro das barras verticais que sustentam as demais é de 4 cm.

Figura 7 – Ilustração dos componentes da passarela.

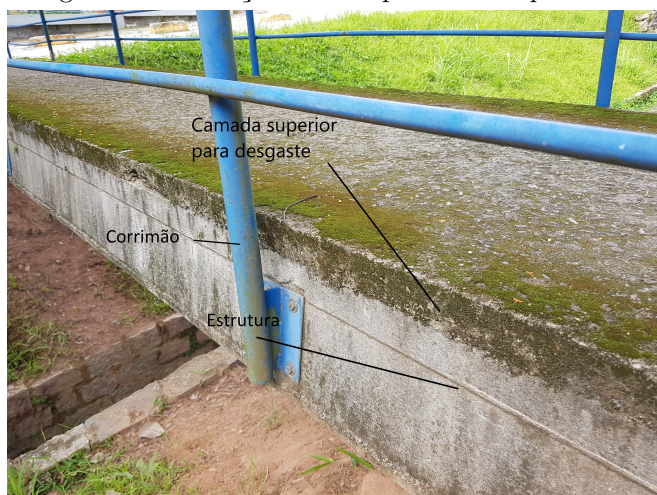


Figura 8 – Medidas passarela.



A parte estrutural da passarela aparenta estar em boas condições, sem rachaduras aparentes, já a metálica apresenta pontos de ferrugem e peças soltas, porém ainda está funcional. A camada superior de concreto, feita para desgaste, está bastante deteriorada devido ao uso e também ao intemperismo. Pode-se observar parte de armaduras em alguns pontos (Figura 9) o que indica que a camada de cobrimento de concreto já foi removida.

Figura 9 – Desgaste na superfície.



Não foi possível identificar alguns dados sobre a estrutura, como o f_{ck} do concreto utilizado ou ainda o diâmetro da armadura e seu espaçamento. Porém, há uma passarela similar nas redondezas que serviu como parâmetro para identificar uma característica importante da estrutura (Figura 10). Para diminuir a massa da estrutura utilizada, a passarela possui alvéolos que não estão visíveis. Pode-se identificar que ambas as passarelas utilizaram o mesmo tipo de formas, deixando um chanfro na lateral da estrutura, o que implica que ambas foram construídas pela mesma empresa e com o mesmo método construtivo. Vale ressaltar que cada alvéolo possui diâmetro de 15 cm e que este detalhe será levado em consideração no modelo computacional da estrutura.

Figura 10 – Passarela exemplo.



A configuração experimental adotada para a realização da análise modal do bloco é mostrada na Figura 11. O aparato experimental conta com alguns equipamentos de suma importância, são eles: dois acelerômetros, analisador, microcomputador, *nobreak*, martelo com ponta de borracha e os cabamentos necessários. Os acelerômetros são medidores que contêm material piezoelétrico capaz de transformar uma determinada variável (no caso do trabalho, aceleração) em sinais elétricos. Esses sinais são lidos pelo analisador, que por sua vez converte estes sinais em números, que podem ser lidos pelo computador. Após o computador ler os sinais, o *software* os interpreta e executa seus cálculos para chegar aos resultados e gráficos. O *nobreak* teve de ser utilizado pois a estrutura a ser analisada não está localizada próxima a tomadas, portanto aquele serviu como bateria para o aparato funcionar. O martelo serviu como fonte de excitação da estrutura, e foi escolhido por causar impacto num ponto específico, além de possuir ponta de borracha, diminuindo os danos causados à estrutura. O *software* utilizado para fazer as medições foi o [Pulse Reflex \(2015\)](#). As características dos equipamentos utilizados encontram-se no apêndice A.

Figura 11 – Configuração experimental.



3.1.1 Definição dos Pontos de Coleta

Para se definir o número de pontos colhidos na estrutura foi utilizada uma recomendação aceita para estruturas, para se estimar quantos pontos serão suficientes para determinar o comportamento da estrutura. Esta recomendação diz que pode-se utilizar 6 elementos (pontos de coleta) por comprimento de onda analisado (Marburg (2002)). Para saber quantos pontos seriam coletados, se faz necessário definir alguns dados.

Os dados necessários para definir o número de pontos de coleta se encontram na Tabela 2. Os dados f_{ck} , ρ (densidade) e E (módulo de elasticidade) foram estimados de acordo com a NBR 6118 (2014), seguindo os parâmetros mínimos para classe de agressividade ambiental aceitos em Florianópolis. O momento de inércia foi calculado considerando as medidas tomadas na passarela, bem como os alvéolos internos.

Tabela 2 – Discretização da passarela.

Variável	Designação	Valor Adotado
f_{ck}	Resistência característica	30 MPa
ρ	Densidade estimada	2500 kg/m ³
m	massa calculada	8640 Kg
E	Módulo de Elasticidade do Concreto	36,80 GPa
I	Momento de inércia em relação à flexão	0,0025508 m ⁴
A	Constante de Dispersão para Eq. 3.2	11,4 m/√s
L	Comprimento da passarela	9,6 m

Utilizando a equação 3.1,

$$\omega = [(2n + 1)\pi]^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m \cdot L^4}}, \quad (3.1)$$

sendo n o número do modos (números naturais positivos), a velocidade angular foi calculada (em rad/s) para então utilizar a Equações 3.2 e 3.3, para calcular o comprimento de onda esperado para cada modo, assim prevendo quantos pontos coletar para conseguir obter esses dados.

$$v = 2 \cdot A \cdot \sqrt{\omega} \quad (3.2)$$

$$\lambda = \frac{v}{\frac{\omega}{2 \cdot \pi}} \quad (3.3)$$

Inserindo a convenção descrita acima, (6 elementos por comprimento de onda) os resultados de comprimento de onda descritos pela Equação 3.3, são divididos por 6. Para cada modo analisado, a distância máxima entre dois pontos de coleta consecutivos está descrita na Tabela 3 a seguir. Os valores encontrados para ω e v se encontram no apêndice B.

Tabela 3 – Resultados de Cálculo.

Modo de vibração	Distância mín. entre cada ponto coletado
1	2,38 m
2	1,43 m
3	1,02 m
4	0,79 m
5	0,65 m

Dessa forma, seria necessário um ponto de coleta a cada 0,65 m para se obter os 5 primeiros modos de flexão, porém foi coletada uma amostra para cada metro. Pode-se notar que, como as propriedades mecânicas da estrutura são desconhecidas, o módulo de elasticidade do concreto foi estimado a partir do f_{ck} também estimado do concreto, seguindo a norma [NBR 6118 \(2014\)](#).

Nos ensaios, um acelerômetro foi colocado em pontos estratégicos da estrutura, fazendo assim um total de 22 medições. O outro serviu como referência, permanecendo sempre em um ponto no centro da estrutura (ver Figura 10). Após a coleta desses dados, os sinais foram devidamente condicionados pelo analisador, juntamente ao *software Pulse Reflex* (2015). A aquisição de dados foi feita na faixa de frequências entre 0 e 400 Hz, com resolução de 0,625 Hz e média de 3 coletas para cada dado, ou seja, para cada um dos 22 pontos da estrutura coletada, foram feitas 3 medições e a média foi extraída. Na Figura 12 os pontos vermelhos representam onde foram coletados os dados e o ponto amarelo onde ficou a referência.

Figura 12 – Pontos de leitura na passarela.



3.1.2 Formas de Excitação

Após a determinação do número de pontos de coleta na estrutura, é necessário definir a melhor forma de excitação. Esta etapa é fundamental, pois como serão colhidas informações acerca das frequências ressonantes da passarela, se faz necessário excitar adequadamente estas frequências. Optou-se pelo martelo de borracha pois este seria capaz de excitar uma grande faixa de frequências (isso consegue-se impondo mais força ao impacto) sem causar grandes danos à passarela em questão. Se o martelo tivesse ponta de aço, seria possível excitar uma faixa mais ampla de frequência (o impacto causado pelo aço é menos amortecido que no caso da borracha), porém a faixa superior da passarela já está bastante gasta, e como seriam necessários vários impactos, era certo que causaria danos à camada superior do concreto.

A passarela analisada encontra-se na Figura 13, e como pode ser visto, não há espaço nas proximidades dela para acomodação do aparato experimental, portanto este teve que ficar acomodado em cima da passarela. Como o peso do equipamento está em cima da passarela é de se esperar um certo erro causado por ele, porém a massa de um

comparado ao outro é desprezível, como será mostrado a seguir.

Figura 13 – Objeto de estudo.



Para definir como seria feito o impacto, foram testadas algumas hipóteses: na primeira o experimentador permanece em cima da passarela durante todo o experimento assim como o aparato experimental, fazendo o impacto da estrutura de cima para baixo (Figura 14). Na segunda o impacto é feito pelo aluno de baixo para cima, este ficando ao lado da estrutura (com os equipamentos ainda em cima da passarela), como pode ser visto na Figura 15. Por último, o aluno causará o impacto pulando na estrutura (o impacto possui mais energia que o martelo e não causa danos à passarela). Esse último modo de excitação se assemelha ao primeiro, exceto pelo impacto ser causado pelo experimentador e não pelo martelo.

Figura 14 – Impacto de cima para baixo com peso acoplado.



Figura 15 – Impacto de baixo para cima sem peso acoplado.



Para esse teste que definirá qual o tipo de impacto a ser utilizado na estrutura, a configuração do equipamento será a seguinte: um acelerômetro será a referência ficando no meio da estrutura, enquanto outro fará a leitura a $1/4$ da margem da passarela. As leituras serão feitas utilizando três impactos para cada medição, observando a coerência, de modo a diminuir o erro humano. Além disso foram feitas cinco coletas, ou seja, para cada forma de excitação diferente foram coletados cinco dados, sendo cada dado composto por três impactos à estrutura. Os resultados obtidos para estas medições serão apresentados a seguir.

Figura 16 – Coerências do impacto de cima para baixo.

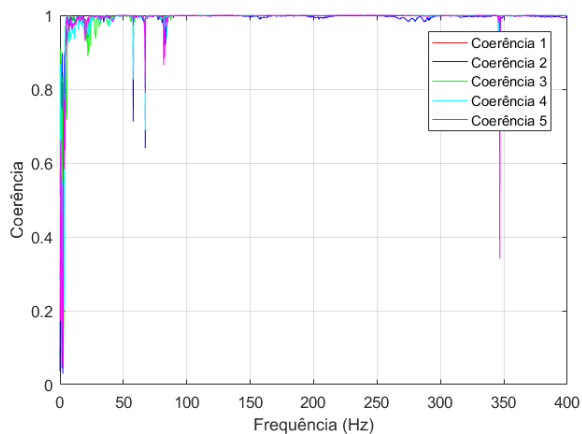


Figura 17 – Coerências do impacto de baixo para cima.

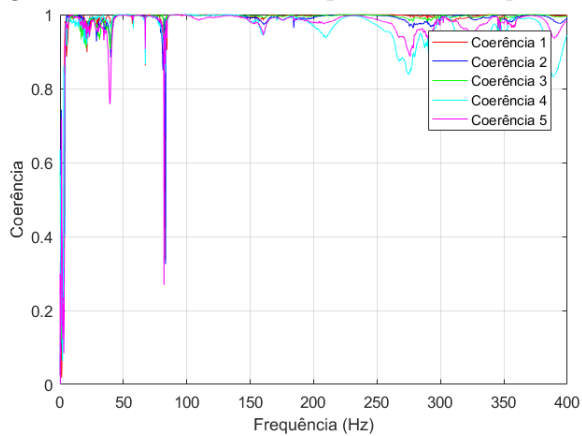
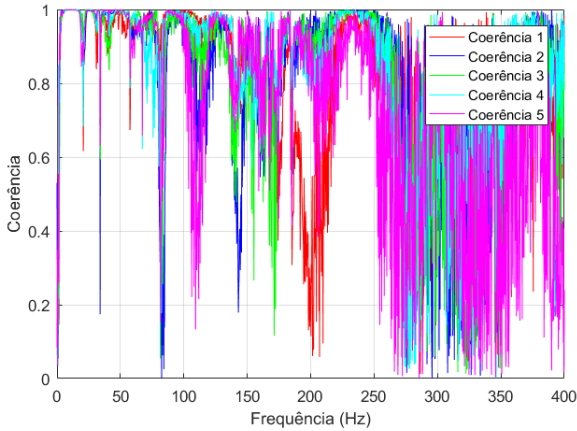
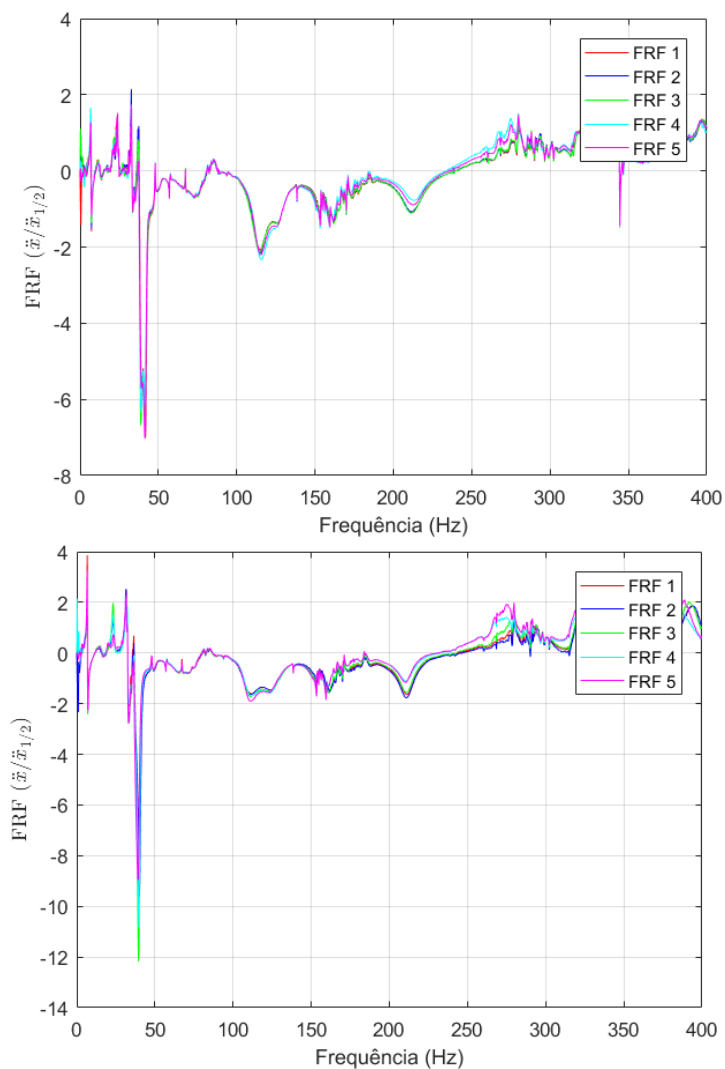


Figura 18 – Coerências do impacto pulando.



Como pode ser visto nos resultados acima, tanto o impacto para baixo (com o peso do experimentador e equipamento acoplado - Figura 16) quanto o impacto para cima (com apenas o peso do equipamento em cima da passarela - Figura 17) obtiveram resultados similares, com boa coerência e resultados mais limpos. Porém, entre esses dois resultados, a primeira obteve coerência melhor, e isso se deve à facilidade de impactar a estrutura, pois, com o experimentador sentado na passarela, o controle do impacto é maior. A terceira maneira de excitação (pulando), embora apresente mais energia, possui coerência ruim, já que devido a área de contato entre o experimentador e a passarela ser muito maior, é muito difícil realizar o impacto sem o efeito *"double hit"* explicado anteriormente neste trabalho. Tendo em vista os resultados obtidos nessa experiência, foi escolhida a primeira forma de excitação, por ter bons resultados e também a melhor coerência (Ver comparação de FRF obtidas nos dois melhores resultados na Figura 19 onde a primeira forma de impacto possui resultado significativamente mais limpo).

Figura 19 – FRFs obtidas com impacto de cima para baixo e de baixo para cima respectivamente.



3.1.3 Coleta de Dados

O próximo passo, então, foi coletar os pontos, a cada metro ou fração, assim como definido pela Figura 12 e Tabela 3, totalizando 22 (vinte e duas) medições por toda a passarela.

Utilizando a forma de excitação descrita, o experimento procedeu-se da seguinte forma: o acelerômetro de referência foi mantido na mesma posição, enquanto o acelerômetro de medição foi colocado no primeiro ponto de medição. Com o aparato experimental pronto, foram feitos três impactos consecutivos com espaço de tempo mínimo entre eles de 4 segundos (tempo em que o equipamento faz as medições). Após analisada a coerência e resultado, o acelerômetro de medição é colocado no ponto seguinte. É importante ressaltar que, sempre que possível, os acelerômetros foram instalados na superfície inferior da passarela, pois superfície superior está gasta, o que dificultaria a instalação dos acelerômetros, influenciando os resultados. Como pode ser visto na Figura 13, nos extremos da passarela não há espaço na parte inferior para instalação dos medidores, portanto a medição teve que ser feita na superfície superior. Foram coletados oito pontos na face superior da passarela, sendo os quatro mais externos de cada lado.

Capítulo 4

Modelo Numérico

"O método de elementos finitos é uma ferramenta numérica de resolução de problemas de meio contínuo, utilizada na análise de estruturas" (Lima (2003)). Nesta ferramenta, o sistema a ser estudado é dividido em **elementos finitos** que estão interconectados por um número finito de **nós**. Estes elementos menores possuem comportamento conhecido e buscam juntos representar a estrutura a que pertencem.

O método se desenvolveu depois da década de 50, a partir dos avanços tecnológicos associados às indústrias aeroespacial e da computação. Atualmente sua utilização é bem abrangente, com ramos em quase todas as áreas de engenharia, envolvendo estruturas, fluidos, termodinâmica, vibrações, acústica, etc.

Segundo Alves, Almeida & Judice (2010), o método possui uma característica primordial, que é estudar um número finito de elementos, que seja capaz de representar o domínio do problema a ser estudado. Desta forma, a precisão do resultado depende diretamente do número de elementos escolhidos para discretizar o problema.

É importante ressaltar que o algoritmo para obtenção das frequências naturais não é o objetivo final deste trabalho. Portanto, a forma como foi produzido será explicitada, porém não serão dados detalhes de programação.

4.1 Modelo Unidimensional - 1-D

Este modelo mais simples foi montado a partir de uma única dimensão. A esta linha foi atribuída, posteriormente, as propriedades geométricas associadas à seção da passarela (incluindo os alvéolos) e a propriedades mecânicas conforme será visto a seguir.

Os dados de entrada inseridos no modelo 1-D estão apresentados na Tabela 2, e as medidas da passarela na Figura 8. Além desses dados, foram inseridos também o coeficiente de Poisson e o amortecimento estrutural encontrados na Tabela 4. Esses parâmetros foram obtidos, respectivamente, da [NBR 6118 \(2014\)](#) e da norma espanhola de concreto armado ([EN 12354-2 \(2001\)](#)) já que este dado não foi contemplado na norma brasileira.

Tabela 4 – Dados Extras.

Dado	Valor adotado
ν	0,2
η	0,006

É importante também explicitar as condições de contorno utilizadas para o modelo inicial, sendo que a estrutura foi considerada bi-apoiada, sobre uma faixa de apoio de 30 centímetros de cada lado da passarela. Um modelo mais completo e representativo consideraria também o concreto utilizado para fazer o acabamento na extremidade, que forma uma rampa de acesso. Este concreto, feito como uma junta fria, não constitui um engaste perfeito, mas também não é considerado como livre. Para adicionar este detalhe ao modelo, seria necessário incorporar uma restrição parcial (entre engaste e livre), porém, sua implementação demandaria bastante tempo.

O ajuste de modelo procedeu-se da seguinte maneira: primeiro, foram determinadas faixas cabíveis de abrangência das propriedades dos materiais, ou seja, foi determinado um valor máximo e um mínimo para a propriedade do material. Esta faixa de valores é incluída para se evitar com que a estrutura criada possuísse propriedades mecânicas

irreais. A propriedade tomada para se realizar este ajuste simplificado foi o E . Observou-se que o coeficiente de Poisson e a densidade média ofereciam muito pouca variação nas frequências naturais. Desta forma, foram realizadas diferentes combinações para E , com valores médios de ν e ρ . Com este ajuste de modelos com base nas frequências experimentais, pretende-se extrair o E que fornece frequências naturais numéricas que melhor se aproximam das experimentais. A resistência característica do concreto f_{ck} pode ser determinada através da Equação 4.1:

$$E_{ci} = \alpha_E \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}}, \quad (4.1)$$

onde $\alpha_E = 1,2$ para agregado de basalto e diabásio, $\alpha_E = 1,0$ para granito e gnaíse, $\alpha_E = 0,9$ para calcário e $\alpha_E = 0,7$ para arenito (neste caso foi considerado $\alpha_E = 1,0$). Com o E ajustado numericamente, pode-se determinar o f_{ck} equivalente, que servirá de parâmetro de comparação com a norma [NBR 6118 \(2014\)](#), de onde a Equação 4.1 foi extraída.

Para determinar a faixa de abrangência do módulo de elasticidade, foi utilizada a Equação 4.1, tendo como dados de entrada a faixa de f_{ck} de utilização da fórmula (entre 20 e 50 MPa segundo a [NBR 6118 \(2014\)](#)), bem como os valores mais favoráveis e desfavoráveis de α_E , de forma a encontrar o valor mais alto e o mais baixo do módulo de Young possível. É importante salientar que o agregado não é visível na parte estrutural da passarela, sendo impossível determinar com exatidão qual foi utilizado. Os valores máximo e mínimo do módulo de elasticidade se encontram na Tabela 5 a seguir.

Tabela 5 – Faixa de variação dos parâmetros do material.

Dado	Valor mínimo	Valor máximo
E_{ci}	17,53 GPa	47,52 GPa
ν	0,11	0,2

Embora o coeficiente de Poisson tenha sido definido inicialmente na Tabela 4, este parâmetro pode variar sutilmente de acordo com [Almeida \(2002\)](#) (Tabela 5). Embora este parâmetro possa variar, esse

não foi incorporado ao algoritmo pois sua influência nos resultados é pouco significativa.

É importante salientar que o escopo deste trabalho consiste em uma análise dinâmica apenas. Desta forma, para se obter um modelo mais representativo se faz necessário também uma análise estática.

Foi adicionado ainda a massa associada ao corrimão de aço, que não possui função estrutural. Os parametros do corrimão nao puderam ser determinados, potanto, para adição de massa à estrutura foram utilizados os valores encontrados num catálogo ([sustentabilidade](#) ()), onde o corrimão tem massa de 6,58 Kg por metro.

Capítulo 5

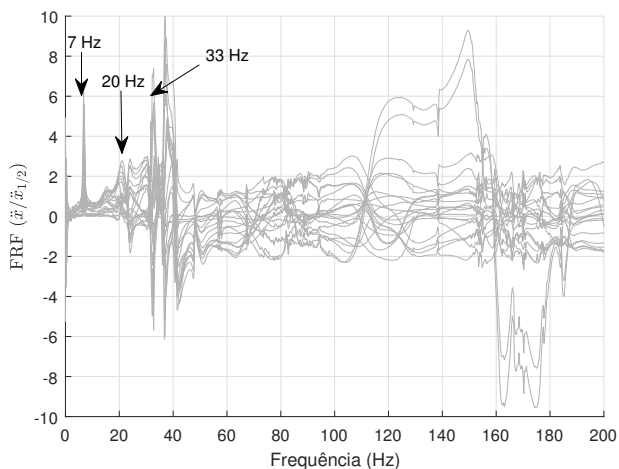
Resultados

Este capítulo apresentará os gráficos de FRF resultantes da parte experimental, bem como os dados obtidos da análise computacional. Serão apresentados também resultados de cálculos computacionais feitos a partir do tratamento de dados via Matlab, como o cálculo do amortecimento estrutural e o cálculo das FRFs.

5.1 Resultados Experimentais

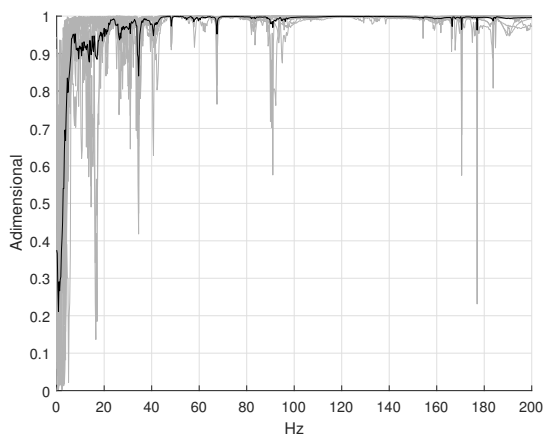
Como pode ser visto na Figura 20 a seguir os resultados experimentais não ficaram concisos como apresentados anteriormente na seção sobre excitação da estrutura. Isso se deve às medições serem feitas em diferentes pontos, já que, na Figura 19 as leituras foram feitas no mesmo ponto de forma a identificar a melhor forma de excitação. Já na Figura 20, os dados foram coletados em vários pontos na passarela. Note que além dos dados coletados (em cinza), está sendo exibido também a média (em preto), calculada utilizando as 22 medições.

Figura 20 – Dados de FRF dos 22 pontos coletados.



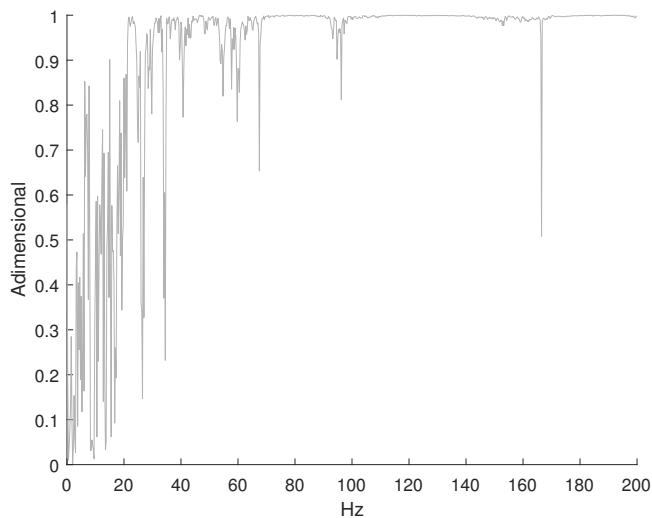
A Figura 20 apresenta uma faixa de leituras, que se distanciam conforme a frequência aumenta. Pode-se notar que mesmo se distanciando, as curvas ainda apresentam formato similar e picos na mesma região. Observe que os picos de ressonância indicam as frequências ressonantes, são elas: 7 Hz, 20 Hz e 33 Hz.

Figura 21 – Coerência.



A Figura 21 apresenta as coerências relativas às vinte e duas medições realizadas e como pode ser visto, as coletas foram feitas de forma adequada. Porém, algumas medições apresentaram uma função de coerência distante da unidade na faixa de frequência de interesse - 0 a 40Hz. Na Figura 22 podemos verificar uma coerência classificada como ruim, que insistiu em ocorrer, mesmo com repetição exaustiva da coleta. Como apresentado anteriormente neste trabalho, haviam pontos na passarela onde não seria possível fixar o acelerômetro na superfície inferior (que é plana e adequada à fixação), estes pontos foram coletados na superfície superior da mesma (muito irregular e de difícil fixação). A fixação do acelerômetro é uma etapa fundamental para a aquisição de resultados adequados. Desta forma, ao fixá-lo numa superfície gasta e pulvurulenta a qualidade dos dados coletados cai drasticamente. Observe ainda que a média das funções coerência apresentada está adequada em todas a faixa de interesse.

Figura 22 – Coerência da coleta com acelerômetro em cima da passarela.

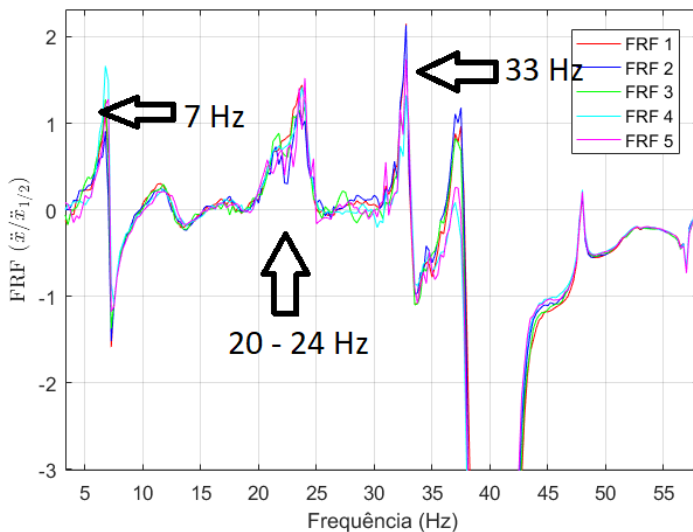


Conforme a Figura 22, não foi toda a faixa de frequência que obteve uma coerência ruim, porém a faixa ruim da coerência abrange os

dados a ser estudados, tornando-os inutilizáveis. Dessa forma estes dados não puderam ser considerados, já que mesmo com a repetição insistente, não foi possível obter uma coerência razoável para estes pontos, em que a fixação do acelerômetro se fez necessária na superfície superior da estrutura.

De acordo com a Figura 20, as três primeiras frequências de ressonância da estrutura são de aproximadamente 7, 20 e 33 Hz. Estes resultados são aproximados pois a medição não é feita de forma ideal. Há erros inerentes ao processo, como a sensibilidade dos acelerômetros, a interferência do experimentador (tanto no impacto quanto na fixação dos acelerômetros) ou ainda a malha de coleta de dados insuficiente. Por exemplo o pico que representa os 20 Hz (Figura 23) possui uma faixa de ocorrência (20 - 24 Hz), sendo esta uma fonte de imprecisão. Caso fosse utilizado um material cuja fabricação é mais controlada, e as condições de contorno fossem asseguradas, seria esperado um resultado mais limpo e preciso, com picos alinhados entre as diferentes medições e formato do gráfico bem similar, o que não acontece no objeto de estudo.

Figura 23 – Zoom nas frequências analisadas.



Os modos de vibração correspondentes às três frequências ressonantes podem ser vistos, respectivamente, nas Figuras 24, 25 e 26.

Figura 24 – Primeiro modo de flexão experimental.

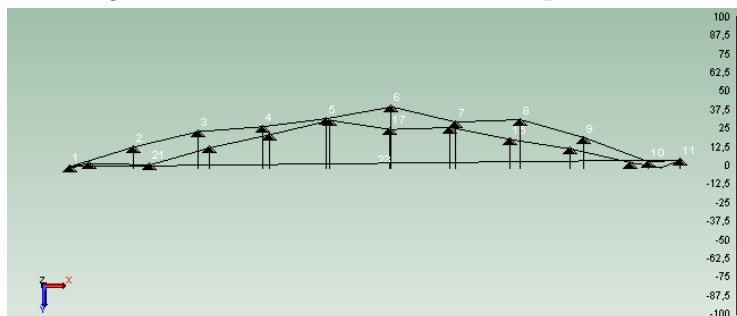


Figura 25 – Segundo modo de flexão experimental.

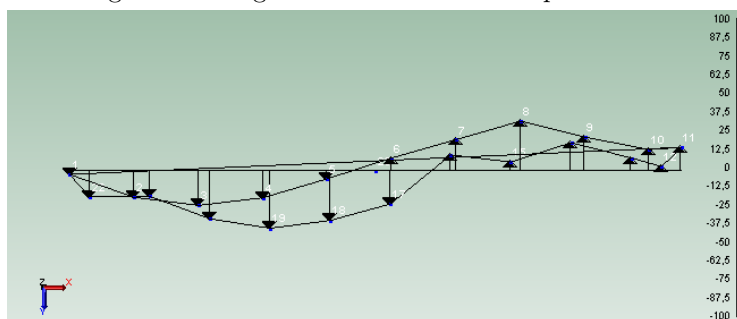
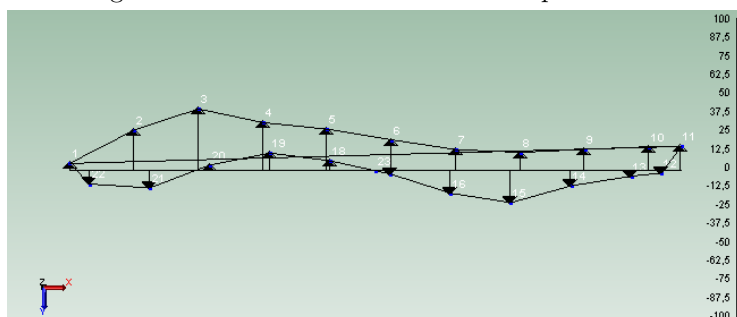


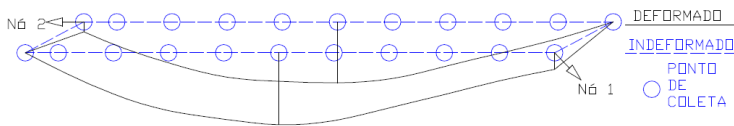
Figura 26 – Terceiro modo de flexão experimental.



Experimentalmente, a estrutura foi modelada como bidimensional, onde as linhas representam suas extremidades. Pode-se notar imperfeições nas curvas apresentadas, que são derivadas nas dificuldades experimentais. Ainda é possível notar que as formas dos modos de flexão foram encontradas. O *software* ainda produz animações dos modos de vibração, onde é possível notar que dois nós dos apoios (em extremidades diametralmente opostas) apresentam movimentação. Esta movimentação pode ser devido alguns fatores, como:

- Imprecisão de leitura: conforme explicitado neste trabalho, o posicionamento dos acelerômetros nas extremidades da passarela foi realizado na superfície superior, que é irregular e deteriorada.
- Condições de contorno: (1) Restrição parcial de translação vertical nas extremidades; (2) Possível empenamento das extremidades. Esta última hipótese se justifica pela movimentação dos nós 1 e 2, nas extremidades, em diagonal, conforme ilustrado na Figura 27.

Figura 27 – Desenho esquemático da movimentação das extremidades.

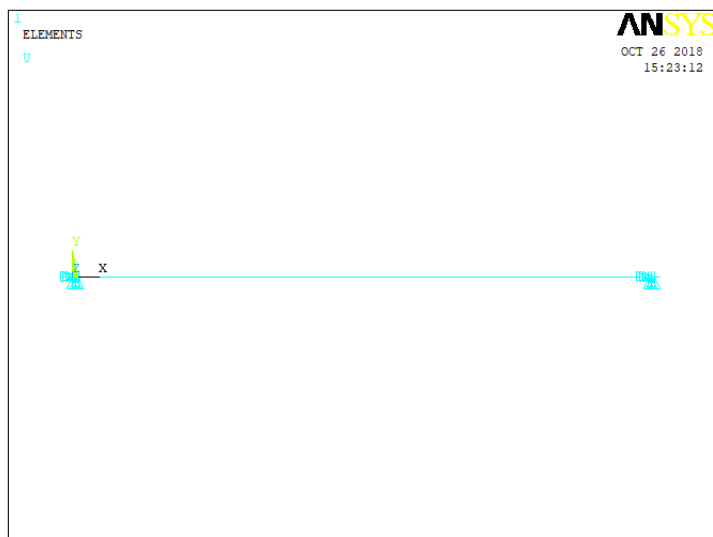


5.2 Resultados Numéricos - 1-D

A partir de um f_{ck} estimado (30 MPa), e o módulo de elasticidade correspondente (36,8 GPa - Equação 4.1), os resultados, antes e depois de ajustar o modelo, encontram-se Tabela 7.

Este modelo 1-D possui um total de 193 nós e 192 elementos do tipo BEAM188. Cada elemento possui seis graus de liberdade, sendo três de translação e outros três de rotação. O BEAM188 é adequado para analisar desde estruturas delgadas a moderadamente espessas.

Figura 28 – Modelo unidimensional.



Na primeira etapa, a seção transversal atribuída ao modelo unidimensional foi maciça, e o ajuste foi feito como pode ser visto na Tabela 6

Tabela 6 – Resultados sem e com ajuste de modelo - sem alvéolos.

Modo	Sem Ajuste (Hz)	Com Ajuste - 12,0 GPa (Hz)
1	12,73	7,27
2	35,36	19,60
3	68,69	38,20

Como visto na Tabela 6, o valor de E , necessário para se obter resultados semelhantes ao experimental é de apenas 12 GPa. Este módulo de elasticidade é extremamente baixo, sendo associado a f_{ck} de aproximadamente 8 MPa, insuficiente para resistir ao peso próprio da passarela.

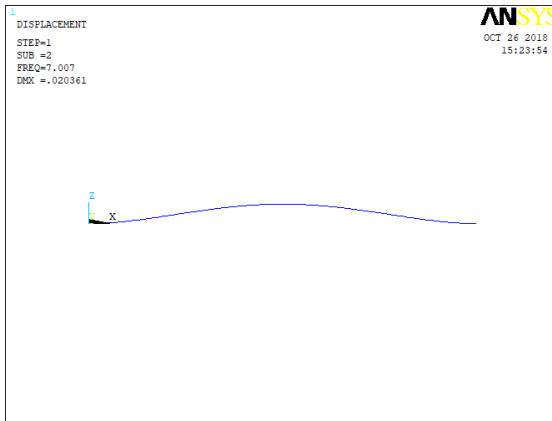
Os três modos de vibração correspondentes às frequências encontradas podem ser vistos nas Figuras 29, 30 e 31. Os resultados obtidos

Tabela 7 – Resultados sem e com ajuste de modelo - com alvéolos.

Modo	Sem Ajuste (Hz)	Com Ajuste - 23,3 GPa (Hz)
1	8,86	7,00
2	24,40	19,27
3	47,69	37,67

(com o ajuste de modelo), foram determinados utilizando um módulo de elasticidade de 23 GPa, que está dentro da faixa estabelecida na Tabela 5.

Figura 29 – Primeiro modo de vibração.



Comparando-se os modos encontrados neste modelo, aos modos encontrados experimentalmente, pode-se averiguar a semelhança. O erro encontrado nas frequências do segundo e terceiro modo foi de, respectivamente, 3,6 % e 10,8 %. Observe que o modelo foi ajustado para a frequência fundamental, de modo que o erro é insignificante.

Embora as figuras que representam os modos de vibração estejam associadas a determinadas frequências, ao modificar o módulo de elasticidade, os modos não se alteram, modificando assim, apenas as frequências correspondentes aos mesmos. Pode-se notar que a variação do coeficiente de Poisson não trouxe diferenças significativas aos resultados

experimentais.

Figura 30 – Segundo modo de vibração.

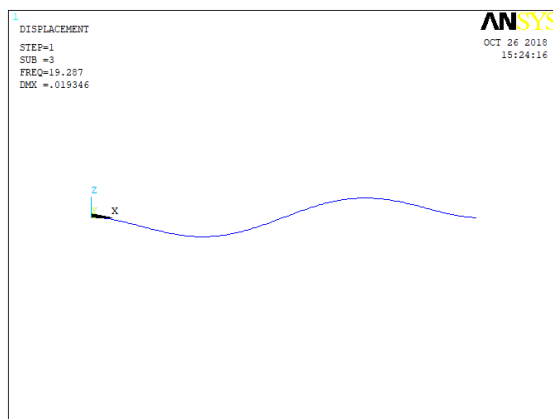
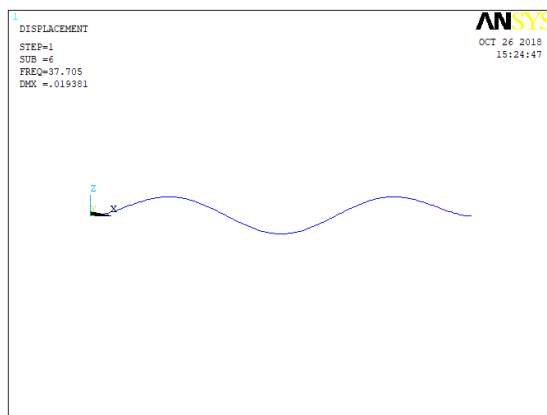


Figura 31 – Terceiro modo de vibração.



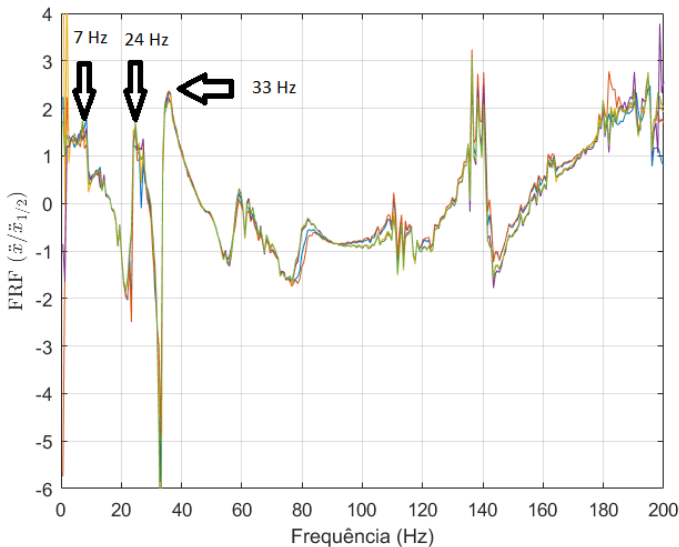
5.3 Conhecimento Extra

Nesta seção do trabalho, serão apresentados os resultados obtidos para a construção da FRF e do cálculo do amortecimento estrutural, a partir do tratamento de dados de aceleração no tempo e das FRF's experimentais respectivamente.

5.3.1 Construção de FRF pelo Matlab

O procedimento utilizado para este cálculo foi mais simples que o adotado pelo *software* experimental ([Pulse Reflex \(2015\)](#)), por isso, é esperado que o gráfico de FRF gerado a partir deste cálculo não seja idêntico ao encontrado experimentalmente, porém, é necessário que as frequências ressonantes sejam as mesmas. Como dados de entrada para este algoritmo, foram utilizados os sinais de aceleração no domínio do tempo referentes às FRF's obtidas com impacto de cima para baixo (Figura 19), portanto é esperado que o resultado apresente curvas que coincidam umas com as outras.

Figura 32 – FRF feita pelo Matlab.



Como pode ser visto na Figura 33, a curva apresentada é diferente da anterior, porém, as mesmas frequências foram encontradas. Esta diferença na forma da curva deve-se ao *software* experimental, que trata os dados de maneira diferente, não aplicando apenas a definição da FRF (Equação 2.1), porém os mesmos valores foram encontrados, o que atesta a utilização da mesma. O algoritmo para obtenção da FRF

a partir dos dados de aceleração no tempo encontr-se no Apêndice C deste trabalho.

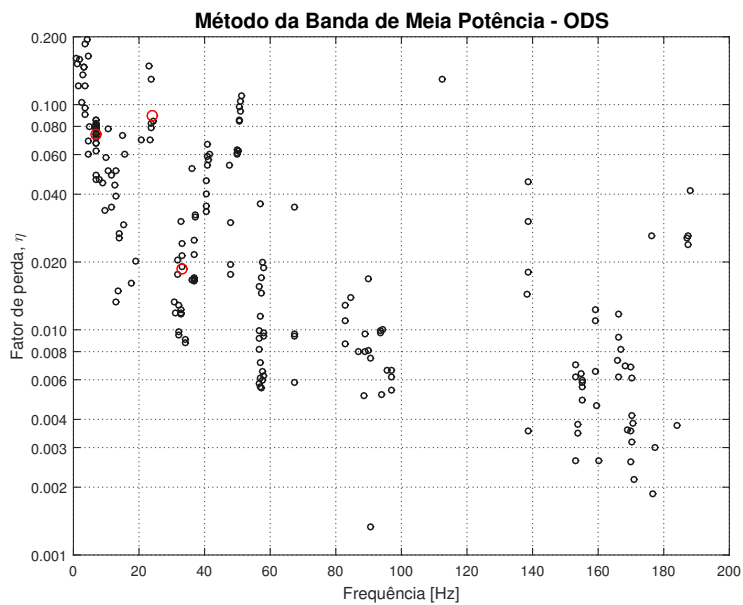
5.3.2 Determinação do amortecimento estrutural

O cálculo do amortecimento, pelo método da Banda de Meia Potência, foi feito utilizando todos os dados de medição considerados, de forma a representar da melhor forma possível a passarela analisada. Os valores encontrados não são concisos, como pode ser visto na Figura 33. Esta variação pode ter acontecido devido à variação no impacto causado pelo experimentador. A média dos valores encontrados, para as frequências modais analisadas (7 Hz, 24 HZ e 33 Hz) é de respectivamente 0,074, 0,089 e 0,0187.

Os valores médios de amortecimento modal estão representados na Figura 33 por círculos na cor vermelha.

Uma das vantagens da determinação do amortecimento estrutural é a utilização destes em modelos numéricos. Note que a norma EN 12354-2 (2001) sugere, na ausência de dados experimentais, que se utilize um valor constante de $\eta = 0,006$ para o amortecimento estrutural. No entanto, esta recomendação é muito ampla. Na prática, cada sistema estrutural possui uma dada capacidade de absorção de energia para uma dada faixa de frequência. Portanto, estes dados encontrados, apresentados na Figura 33, nos fornecem uma informação valiosa para esta passarela.

Figura 33 – Amortecimento.



Capítulo 6

Conclusão

O presente trabalho de conclusão de curso buscou realizar uma análise modal experimental de uma passarela de concreto armado, a fim de encontrar as primeiras frequências de ressonância da estrutura. Para tanto, foi utilizada uma metodologia experimental, bem como o MEF (utilizando dois modelos), onde foram encontradas três frequências ressonantes. A AMO indicou que os três primeiros modos de vibração de flexão da estrutura foram: 7 Hz, 20 Hz e 33 Hz, enquanto que os modos extraídos numericamente foram de 7 Hz, 19 Hz e 38 Hz. Os modelos numéricos propostos capturaram com boa precisão a frequência fundamental da estrutura. No entanto, observou-se uma diferença significativa nas frequências de ressonância do segundo e terceiro modo de flexão. Estas diferenças entre os resultados numéricos e experimentais podem estar associadas a fatores como:

- Excitação da estrutura. A estrutura analisada possui largas dimensões e uma massa estimada de 8640 Kg (6095 Kg descontando o volume dos alvéolos). Para se obter os primeiros modos de vibração da estrutura, esta deve ser excitada com energia suficiente para abranger as frequências desejadas. Esta excitação, idealmente, deveria ser realizada com um excitador eletromecânico de grande porte para garantir a excitação completa da estrutura.

Neste estudo, foi utilizado uma marreta de borracha com este propósito. Conforme pode ser observado na Figura 23, as frequências correspondes ao segundo e terceiro modo de flexão (24Hz e 33Hz, respectivamente) não estão bem definidas. Desta forma, acredita-se que a técnica de excitação empregada pode ter alterado os resultados devido a insuficiência de energia transmitida à estrutura;

- Imprecisões construtivas (geometria, material e condições de contorno).

Existem muitas incertezas associadas ao processo construtivo da estrutura. A **geometria** (laje, camada para desgaste e corrimão) é mais tangível de ser reproduzida numericamente. Porém, as **propriedades mecânicas** do concreto armado, inseridas no modelo numérico, não podem ser determinadas com precisão uma vez que não se tem conhecimento do traço do concreto e nem do acompanhamento da execução deste objeto de estudo. Por exemplo, este material é altamente heterogêneo, podendo existir grumos de concretagem não visíveis. Além disso, as **condições de contorno** impostas no modelo numérico, também foram simplificadas. O grau de restrição nos graus de liberdade do contato entre a passarela e a fundação é desconhecido, assim como a área desta face de contato;

- Tempo de existência da estrutura. A estrutura encontra-se exposta ao intemperismo, com isso, há um desgaste que não foi inserido no modelo numérico.

Embora não seja possível visualizar os alvéolos na estrutura analisada, foi constatada sua necessidade. Ao construir o modelo unidimensional, utilizando seção transversal maciça, foi encontrado um módulo de elasticidade de 12 GPa (para encontrar resultados semelhantes ao experimental). Utilizando a Equação 4.1 e variando-se o valor de α_E , conclui-se que o f_{ck} correspondente está compreendido entre 3,2 e 9,0 MPa, valores que não atendem a NBR 6118 (2014). Estes valores de f_{ck} são tão baixos que é difícil afirmar que a passarela sustentaria seu

próprio peso se fosse construída com este material. No modelo numérico, ao inserir uma seção considerando os alvéolos, constatou-se que $E = 23,3$ GPa resulta em um modelo ajustado para o primeiro modo de flexão. Este valor proposto para E é mais coerente, e, utilizando a Equação 4.1, a faixa de resistência para o material encontrado é de 11,7 a 34,4 MPa. Porém a norma afirma que a fórmula pode ser utilizada num intervalo de f_{ck} de 20 a 55 MPa, desta forma a faixa correspondente considerada é de 20,0 a 34,4 MPa. Contudo, embora seja constatada a presença dos alvéolos na passarela, não é possível determinar com segurança sua dimensão, sendo utilizado neste estudo a dimensão encontrada em uma passarela similar.

Quanto às considerações utilizadas para a fase experimental deste estudo, conclui-se que, para obter-se as três primeiras frequências ressonantes, era necessário um ponto de coleta a cada 1,02 m (Tabela 3). Como pode ser visto nas Figuras 26 e 31, há um comprimento de onda e meio nos 9,6 m de comprimento de onda (para o terceiro modo de vibração), com isso, têm-se que o comprimento de onda associado a esta frequência é de 6,4 m. Impondo a convenção de seis elementos por comprimento de onda, o comprimento máximo entre dois pontos de coleta real é de 1,07 m. Desta forma aponta-se que os cálculos para determinação do número de pontos de coleta estão corretos.

6.1 Trabalhos futuros

A partir dos resultados e das limitações apresentadas por este trabalho de conclusão de curso, e a fim de trazer novas contribuições para a área de estruturas da engenharia civil, sugere-se a realização dos seguintes estudos:

- Obter informações detalhadas do sistema analisado ainda em fase de projeto, onde haverão mais informações acerca da obra;
- Testar novas formas de excitação da estrutura;

- Tentativa de viabilizar uma análise modal convencional, com transdutor de força no martelo de impacto;
- Investigar novos métodos para a determinação do amortecimento estrutural de sistemas de concreto;
- Analisar diversas estruturas, de forma a criar um critério de confiabilidade para o MEF;
- Comparação entre o modelo experimental e o modelo computacional pelo *Eberik*, que disponibiliza um módulo de análise modal;
- Verificar a metodologia proposta em estruturais menos complexas, como passarelas de aço.

Referências

AHMED EHSAN; BADARUZZAMAN, W. H. W. Evaluation of natural frequency and damping of profiled steel dry board composite panel. *Journal Of Engineering Science And Technology. Selangor, Malásia*, 2011.

ALMEIDA, L. C. de. *Concreto - Notas de aula da disciplina AU414 - Estruturas IV – Concreto armado*. [S.l.]: Universidade Estadual de Campinas, 2002.

ALVES, E. V.; ALMEIDA, S. M. F. de; JUDICE, F. M. de S. Métodos de análise estrutural de tabuleiros de pontes em vigas múltiplas de concreto protendido. *Engevista*, 2010.

ALVES, L. Controle de vibrações em edifícios altos sujeitos a vento ou terremoto. *Goiânia, Universidade Federal de Goiás*, 2015.

ANSYS, L. Ansys user's manual: Theory, vol. iv. *Swanson Analysis Systems, Inc*, 1994.

BARRAULT, G. Controle ativo de vibrações de baixas e altas frequências e ruído radiado de estruturas complexas. *Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina*, 2006.

BARTON, M. <https://www.quora.com/whats-the-difference-between-resonance-and-aeroelastic-flutter> - acessado em 03/12/18 às 18:52. PhD in Physics, The University of Queensland, physicist with National Astronomical Observatory of Japan, 2018.

CREMER L; HECKEL, M. U. E. Structure-borne sound. structural vibrations and sound radiation at audio frequencies. *Springer, Berlin, Heidelberg, New York*, 1988.

DALLARD, P. e. a. The millennium bridge, london: Problems and solutions. *The Structural Engineer*, 2001.

EN 12354-2. *Comité técnico AEN/CTN, AENOR - Acústica de la edificación - Estimación de las características acústicas de las edificaciones a partir de las características de sus elementos - Parte 2: Aislamiento acústico a ruido de impactos entre recintos*. [S.l.]: Asociación Española de Normalización y Certificación - AENOR, 2001.

- FULLER, R. G. e. a. Tacoma narrows bridge collapse. *Lincoln: Aapt-american Association Of Physics Teachers*, 1994.
- HE, Z.-F. F. J. Modal analysis. *Elsevier*, 2001.
- INMAN, D. J. *Engineering Vibration*. [S.l.]: Pearson Education Inc., 2007.
- LENZI, A. Notas de aulas de análise estatística energética. *Florianópolis. Laboratório de vibrações e acústica*, 1999.
- LIMA, H. L. S. S. de S. Método de elementos finitos em análise de estruturas. EDUSP; 1 edition, 2003.
- MARBURG, S. Six boundary elements per wavelength: Is that enough?, vol. 10. *Journal of Computational Acoustics*, 2002.
- MEAD, D. J. Passive vibration control. *John Wiley & Sons, Chichester, UK*, 1998.
- NBR 6118. ABNT: Estruturas de concreto armado. *Rio de Janeiro*, 2014.
- NBR 8800. ABNT: Estruturas de concreto armado. *Rio de Janeiro*, 2008.
- NICOLETTI, R. Estudo do controle ativo e passivo de vibrações em sistemas rotativos e estruturais. *São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo*, 2013.
- Pulse Reflex. Pulse reflex product data. *Brüel & Kjær Sound Vibration Measurement*, 2015.
- RAO, S. S. Vibrações mecânicas 4. ed. *São Paulo: Pearson Prentice-Hall*, 2008.
- SHIGLEY, J. E. Dinâmica das máquinas. *São Paulo: Edgard Blücher*, 1969.
- SUSTENTABILIDADE, W. engenharia e. Memorial descritivo.
- THOMSON, W. T. *Teoria das vibrações - Aplicações*. [S.l.]: Prentice Hall, 1983.
- ZAPFE, M. Passive vibration control technical statement concerning the wind load of under-streamed solar modules with different angles of inclination. *München*, 2007.

Capítulo 7

Apêndice

7.1 Apêndice A

7.1.1 Equipamentos

Tabela 8 – Equipamentos.

Equipamentos	Fabricante	Propriedade
Acelerômetro Uniaxial Referência	Bruel & Kjaer	Modelo:4519-001 Número de Série:61295 Sensib.: 10,63 mV/(m/s ²)
Acelerômetro Uniaxial Medição	Bruel & Kjaer	Modelo:4519-001 Número de Série:61289 Sensib.: 10,47 mV/(m/s ²)
Analizador de Sinais <i>Software</i>	Bruel & Kjaer Bruel & Kjaer MATrix LABoratory Ansys	Modelo: 7540A Pulse Reflex Matlab Ansys R16.2
Notebook	HP	Core i-7 RAM: 4 Gb
Nobreak Suporte	- LVA	- -

7.2 Apêndice B

7.2.1 Valores Encontrados para ω e v

Tabela 9 – Valores Calculados de ω e v .

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
$\omega(rad/s)$	100,47	279,09	547,03	904,27	1350,82
$v\ (m/s)$	228,54	380,9	533,26	837,98	990,34

7.3 Apêndice C

7.3.1 Algoritmo para obtenção da FRF a partir de dados de aceleração no tempo

```
%
%
% Description: Calculate the FRF based on acceleration data on
time domain
%
% June 11th 2018
%
% Aluno: Gabriel Dobbro
%
%
%
close all; clear all; clc
%
M = load('D:/TCC/May-15th-2018-Hammer-upper.txt');
t = M(:,1); % Escala de tempo
%
NMeas = 5; % Number of measurements
%
```

```

    for ii = 1:NMeas;
    %
    AcTime = M(:,ii+1); % Aceleração no tempo
    dt = length(AcTime); % Timing Substeps (foi feita a limpeza
retirando dados após 0,6s de leitura)
    df = 400/dt; % Medições feitas até 400Hz; df: Frequency discre-
tization
    f = df:df:(400/2); % Frequency list
    %
    AcFreq-Reference = fft(transp(AcTime),dt);
    %
    AcTime = M(:,ii+6);
    AcFreq-Reading = fft(transp(AcTime),dt);
    %_____
    % Frequency Response Function (FRF = FFT1/FFT2)
    %_____
    FRF(ii,:) = AcFreq-Reference(1,1:(dt/2))./(AcFreq-Reading(1,1:(dt/2)));
    %
    if ii==NMeas
    figure(ii+1)
    plot(f,FRF),grid,xlabel('Frequência (Hz)'),ylabel('FRF ( $\ddot{x}/\ddot{x}_{1/2}$ )',
'Interpreter','latex'); hold on;
    ylim([-6 4])
    end
    end
    %
    %

```